

SPHERISCHE ABERRATIE VAN EEN BÊTASPECTROGRAAF

R 43

Rekenafdeling Mathematisch Centrum.

1 9 4 9 .

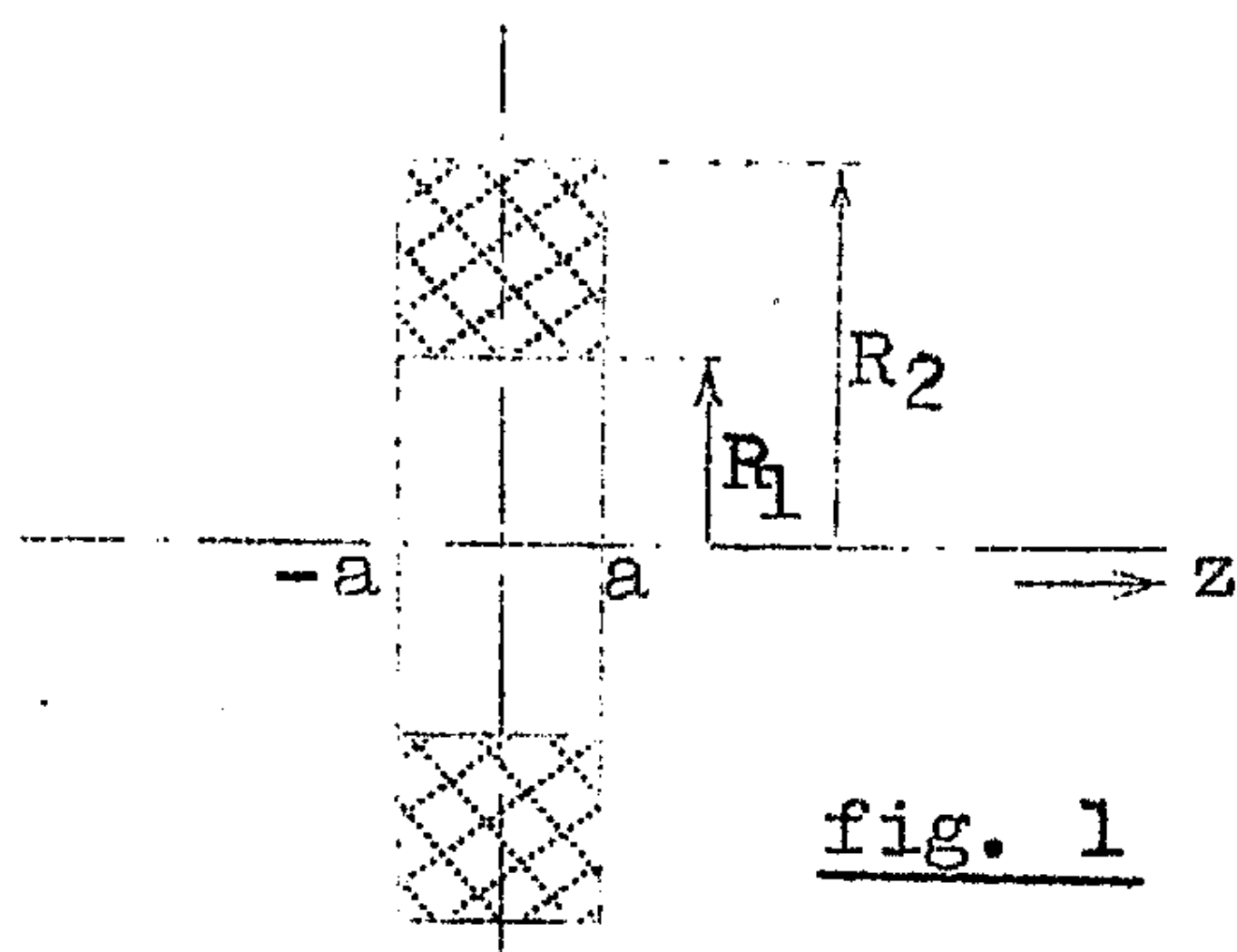
SPHERISCHE ABERRATIE VAN EEN BÊTASPECTROGRAAF.

1. Inleiding.

De hier volgende berekeningen werden uitgevoerd op verzoek van het Instituut voor Kernfysisch Onderzoek te Amsterdam. Het onderwerp betreft de berekening van "Het magneetveld voor een bêta-spectrograaf". Vergelijk hiertoe het memorandum van de opdrachtgever met bovengenoemde titel van de hand van Drs. N.F. Verster.

2. Onderwerp van de berekeningen.

De doelstelling is de berekening van de spherische aberratie van een stelsel coaxiale magnetische lenzen. Alle lenzen zijn identieke spoelen (zie fig. 1). De afmetingen bedragen:



$$R_1 = 17,0 \text{ cm}$$

$$R_2 = 34,0 \text{ cm}$$

$$a = 0,75 \text{ cm}$$

Aantal ampere windingen = 100.

Voorts zij I de stroomdichtheid, dus gelijk aan $\frac{200}{51} \text{ amp/cm}^2$.

Stellen wij het magneetveld van de spoel $H(z) = 0,2 \pi I h(z)$, dan is

$$h(z) = (z+a) \ln \frac{R_2 + \sqrt{R_2^2 + (z+a)^2}}{R_1 + \sqrt{R_1^2 + (z+a)^2}} - (z-a) \ln \frac{R_2 + \sqrt{R_2^2 + (z-a)^2}}{R_1 + \sqrt{R_1^2 + (z-a)^2}}. \quad (2,1)$$

Hieruit moet het veld van het spoelenstelsel worden berekend. Ten eerste voor vijf spoelen:

$$h_5(z,p) = h(z,49-p) + h(z,51-p) + h(z,51+p) + h(z,53+p) + h(z,55+p) \quad (2,2)$$

en vervolgens voor zes spoelen:

$$h_6(z,p) = h_1(z,p) + h(z,47-p). \quad (2,3)$$

Hierbij dienen voor p de waarden 1; 5; 9; 13 en 17 te worden genomen.

Vervolgens moet de eerste orde baan van een electron bepaald worden. Zij deze $R_0(z)$ en geven wij met accenten differentiatie naar z aan, dan volgt $R_0(z)$ uit het eigenwaardprobleem:

$$R_0'' + k H^2 R_0 = 0 \quad ; \quad R_0(3) = R_0(100) = 0 \quad ; \quad R_0'(3) = 1. \quad (2,4)$$

Zowel de eerste eigenwaarde k_0 als de eerste eigenfunctie R_0 moeten worden berekend, beide met een precisie van ca. 1%.

Ten slotte moeten de constanten C_1 en C_2 , welke de spherische aberratie van het stelsel defirieren, worden bepaald. Zij volgen uit:

$$C_1 = \int_3^{100} R_0^2 H^2 dz, \quad (2,5)$$

$$C_2 = \frac{k_0}{12} \int_3^{100} R_0^4 (16 k_0 H^4 + 5 H'^2 - HH'') dz. \quad (2,6)$$

De vereiste precisie bedraagt hier ook ca. 1%.

Voor het beoordelen van de invloed van de verschillende spoelstanden is nu dus verkregen: k_0 , C_1 en C_2 als functie van p .

3. Uitvoering van de berekeningen.

Eerst werd uit (2,1) de gereduceerde veldfunctie $h(z)$ van een enkele spoel berekend voor $z = 0$ (1) 74 in 6 decimalen. Hieruit werden $h'(z)$ en $h''(z)$ door numerieke integratie bepaald. Deze drie functies zijn gegeven in de Appendix.

Met behulp hiervan werden voor de verschillende waarden van p uit (2,2) en (2,3) h_5 en h_6 berekend benevens hun afgeleiden h'_5 , h''_5 , h'_6 en h''_6 .

Om het eigenwaardeprobleem (2,4) op te lossen, vormen wij (2,4) een weinig om. Stel nl. $k_0(0,2\pi I)^2 = \lambda$ en laat ons de absolute grootte van R_0 voorlopig verwaarlozen, d.w.z. laten wij stellen $r = c \cdot R_0$, waarin c een willekeurige constante is. Dan is:

$$r'' + \lambda h^2 r = 0 \quad ; \quad r(3) = r(100) = 0 \quad ; \quad r \neq 0. \quad (3,1)$$

Dit vraagstuk lossen wij op door iteratie, nl. door te stellen:

$$r''_{k+1} + h^2 r_k = 0 \quad ; \quad r_k(3) = r_k(100) = 0. \quad (3,2)$$

Zoals bekend convergeert dit proces snel tot de eerste eigenfunctie. Zij r_n de laatste geitereerde, dan is dus $\lambda_n = r_n/r_{n-1}$ bij voldoende benadering constant (onafhankelijk van z) en $\lambda = \lambda_n$. Wij bepalen dan $r'_n(3)$ en dan is $R_0(z) = r_n(z)/r'_n(3)$.

Als uitgangsfunctie kozen wij $r_0 = \sin(2z-6)^\circ$ voor $3 \leq z \leq 48$, $r_0 = 1$ voor $48 \leq z \leq 55$ en $r_0 = \sin(2z-20)^\circ$ voor $55 \leq z \leq 100$. Er werd zovaak geitereerd, dat λ in minstens 3 cijfers constant bleef als functie van z . Dit vereiste doorgaans 3 iteraties. Men realiseer zich wel, dat om alleen λ te bepalen niet zoveel iteraties nodig zijn, doch slechts om de eigenfunctie behoorlijk te kennen.

$R_0(z)$ werd in het geheel niet bepaald. Immers volgt uit (2,5) en (2,6):

$$C_1 = \left\{ \frac{0,2 \pi I}{r_n'(3)} \right\}^2 \int_3^{100} r_n^2 h^2 dz, \quad (3,3)$$

$$C_2 = \frac{\lambda_n}{12} \left\{ \frac{1}{r_n'(3)} \right\}^4 \int_3^{100} r_n^4 \{ 16 \lambda_n h^4 + 5 h'^2 - h h'' \} dz. \quad (3,4)$$

4. Resultaten van de berekeningen.

De resultaten van de berekeningen zijn:

Stelsel van 5 lenzen:				Stelsel van 6 lenzen:		
p	k.10 ⁵	C ₁ .10 ⁻⁶	C ₂	k.10 ⁵	C ₁ .10 ⁻⁶	C ₂
1	0,886	7,995	259,5	1,263	5,825	229,6
5	0,969	7,094	225,6	1,369	5,413	246,2
9	1,123	5,818	185,7	1,570	4,688	241,1
13	1,349	4,505	145,3	1,865	3,890	215,2
17	1,652	3,353	109,4	2,261	3,131	193,1

Appendix.

Gereduceerde veldfunctie van een enkele spoel $h(z)$ met haar 1^e en 2^e afgeleide.

z	h	h'	h''
0	1,039174	- 0,000000	- 0,005821
1	1,036271	- 0,005790	- 0,005728
2	1,027655	- 0,011396	- 0,005456
3	1,013596	- 0,016650	- 0,005026
4	0,994521	- 0,021408	- 0,004473
5	0,970980	- 0,025567	- 0,003833
6	0,943609	- 0,029061	- 0,003150
7	0,913089	- 0,031864	- 0,002459
8	0,880108	- 0,033986	- 0,001790
9	0,845333	- 0,035461	- 0,001169
10	0,809384	- 0,036344	- 0,000611
11	0,772818	- 0,036708	- 0,000128
12	0,736118	- 0,036623	0,000284
13	0,699696	- 0,036165	0,000621
14	0,663889	- 0,035405	0,000888
15	0,628965	- 0,034409	0,001095
16	0,595131	- 0,033234	0,001246
17	0,562539	- 0,031933	0,001350
18	0,531294	- 0,030546	0,001418
19	0,501464	- 0,029109	0,001451
20	0,473083	- 0,027653	0,001458
21	0,446158	- 0,026200	0,001445
22	0,420677	- 0,024766	0,001418
23	0,396613	- 0,023368	0,001378
24	0,373926	- 0,022015	0,001327
25	0,352566	- 0,020713	0,001276
26	0,332481	- 0,019467	0,001214
27	0,313610	- 0,018283	0,001155
28	0,295894	- 0,017159	0,001093
29	0,279271	- 0,016097	0,001033
30	0,263681	- 0,015094	0,000973
31	0,249064	- 0,014151	0,000913
32	0,235360	- 0,013265	0,000859
33	0,222515	- 0,012435	0,000802
34	0,210473	- 0,011657	0,000754
35	0,199185	- 0,010929	0,000702
36	0,188600	- 0,010247	0,000659
37	0,178674	- 0,009611	0,000614
38	0,169362	- 0,009019	0,000574
39	0,160624	- 0,008464	0,000536
40	0,152422	- 0,007946	0,000500

Appendix (Vervolg).

Gereduceerde veldfunctie van een enkele spoel $h(z)$ met haar 1^o en 2^e afgeleide.

z	h	h'	h''
40	0,152422	- 0,007946	0,000500
41	0,144720	- 0,007463	0,000467
42	0,137485	- 0,007012	0,000435
43	0,130685	- 0,006592	0,000406
44	0,124291	- 0,006200	0,000379
45	0,118276	- 0,005833	0,000355
46	0,112616	- 0,005491	0,000330
47	0,107286	- 0,005173	0,000308
48	0,102264	- 0,004874	0,000289
49	0,097531	- 0,004596	0,000269
50	0,093067	- 0,004335	0,000253
51	0,088856	- 0,004091	0,000235
52	0,084880	- 0,003864	0,000220
53	0,081124	- 0,003650	0,000207
54	0,077575	- 0,003451	0,000192
55	0,074218	- 0,003264	0,000182
56	0,071043	- 0,003089	0,000169
57	0,068037	- 0,002925	0,000159
58	0,065190	- 0,002770	0,000150
59	0,062493	- 0,002626	0,000140
60	0,059936	- 0,002490	0,000132
61	0,057511	- 0,002362	0,000123
62	0,055209	- 0,002243	0,000116
63	0,053023	- 0,002130	0,000109
64	0,050946	- 0,002025	0,000103
65	0,048972	- 0,001925	0,000097
66	0,047095	- 0,001831	0,000091
67	0,045309	- 0,001742	0,000086
68	0,043609	- 0,001659	0,000081
69	0,041990	- 0,001580	0,000076
70	0,040447	- 0,001506	0,000072
71	0,038976	- 0,001436	0,000069
72	0,037574	- 0,001369	0,000064